

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2024/25

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 2025, które są podzielne przez 3 i 4, ale nie są podzielne przez 5?
2. Załóżmy, że $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{8}{3}.$$

3. Wyznacz te wartości parametru p , dla których ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{(2n - 3)^2}{(p^4 - 1)n^2 + 3p + 3}$$

ma granicę niewłaściwą $+\infty$.

4. Rozwiąż nierówność

$$|1 + \log_{0,5}(x - 1)| \geq 2.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. W kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie dana jest figura

$$F = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 10x + 21 \leq 0 \wedge x - y - 5 \geq 0\}.$$

Figura F' jest obrazem figury F w symetrii osiowej względem prostej przechodzącej przez punkty $(-2, -1)$, $(4, 2)$. Wyznacz układ nierówności opisujący figurę F' . Po wykonaniu obliczeń narysuj figury F i F' w jednym układzie współrzędnych.

6. Z liter słowa OLIMPIADA układamy słowa k -literowe, w których każda litera może wystąpić co najwyżej tyle razy, ile występuje w słowie OLIMPIADA. Ile jest różnych słów dla $k = 9$, $k = 6$ i $k = 3$?
7. Na stole leżą trzy parami styczne kule o promieniu R . Na nich położona jest czwarta kula o promieniu r , tak że jest ona styczna do pozostałych trzech i nie dotyka stołu. Oblicz odległość środka czwartej kuli od stołu. Jakie warunki muszą spełniać promienie R i r , aby takie ułożenie kul było możliwe?