

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2024/25

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że reszta z dzielenia kwadratu dowolnej liczby nieparzystej przez 8 jest równa 1.
2. Oblicz granicę ciągu (a_n) , gdzie

$$a_n = \left(2^{2n+1} + 3^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Rozwiąż równanie

$$\log(1 + 9^x) + \log 3 = 1 + \log 3^x.$$

4. Niech D będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC . Wykaż, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ADC i BCD są równe.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. W pewnym liceum II etap *Olimpiady o Diamentowy Indeks AGH* z matematyki odbywa się w trzech salach 9-osobowych, dwóch 12-osobowych i w jednej 15-osobowej. Egzaminator wybiera losowo jedną z sal (każdą z tym samym prawdopodobieństwem).
 - A. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwóch uczniów z wybranej sali obchodzi urodziny w tym samym miesiącu?
 - B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wybranej sali jest 12 uczniów, jeżeli wiadomo, że co najmniej dwie osoby z tej sali obchodzą urodziny w tym samym miesiącu?
6. Dla każdej liczby $m \in \mathbb{R}$ wartość $g(m)$ funkcji g jest równa liczbie ujemnych pierwiastków równania

$$(m + 1)(x^{14} + x^2) = 4mx^8.$$

Naszkiej wykres funkcji g .

7. Jaką największą objętość może mieć ostrosłup prawidłowy trójkątny wpisany w sferę o promieniu R ?