

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2024/25

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Rzucamy k razy monetą. Ile jest możliwych wyników, w których dokładnie dwa razy wyrzucimy tę samą stronę monety co w poprzednim rzucie?
2. W trójkącie o długościach boków a, b, c kąt α leży naprzeciw boku długości a . Udowodnij, że

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Dla jakich trójkątów prawdziwa jest równość?

3. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^3} + \sqrt{x - 1} < 0.$$

4. Na okręgu opisany jest trapez prostokątny, w którym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od prostopadłego do niej ramienia. Oblicz stosunek długości przekątnych trapezu.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Znajdź punkt P , w którym styczna do wykresu funkcji danej wzorem

$$g(x) = 2x + \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} + \frac{54x}{(x-1)^3} + \dots$$

jest równoległa do prostej $4x + y - 20 = 0$. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt P i stycznego do obydwu tych prostych.

6. Czy liczby $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ mogą być wyrazami tego samego ciągu arytmetycznego (niekoniecznie kolejnymi)?
7. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = x(x-2)(x-4)(x-6).$$

Wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$. Rozwiąż równanie $f(x) = 9009$.